

Sur la prise en compte des variations de chargement et de géométrie dans les assemblages

L. Champaney*, P.-A. Boucard*

*LMT-Cachan (ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6)
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex, France
laurent.champaney@lmt.ens-cachan.fr

Résumé :

L'objet de ce travail est de développer une méthode spécialisée pour l'étude paramétrique d'assemblages incluant de multiples zones de contact frottant. Cette méthode tire parti du fait que les non-linéarités et/ou les incertitudes sont localisées dans les liaisons. On utilise une représentation unifiée de ces zones de liaison sous forme d'interfaces en introduisant une décomposition de l'assemblage. L'algorithme de résolution itératif utilisé (méthode LATIN) permet un découplage du traitement des non-linéarités et/ou incertitudes locales du traitement des problèmes linéaires globaux. Chaque configuration d'un assemblage correspond à un choix de valeurs des paramètres décrivant les chargements extérieurs et les géométries des zones de contact. Plutôt que de réaliser un calcul complet pour chaque jeu de paramètres, nous utilisons la capacité de la méthode LATIN à réutiliser simplement la solution d'un problème donné (associé à un jeu de paramètres) pour en résoudre d'autres. Les exemples proposés concernent des assemblages de structures 3D avec des liaisons par contact frottant.

Abstract :

The objective of this work is to develop a suitable strategy for the parametric analysis of assemblies with multiple contacts. Our approach is based on a decomposition of the assembly into substructures and interfaces. The interfaces play the vital role of enabling the local nonlinearities and the uncertainties to be modeled easily and accurately. The problem is solved by using an iterative scheme based on the LATIN method that allows decoupling the treatment of non-linearities and/or local uncertainties of the treatment of the global linear problems. Each configuration of an assembly is associated with a choice of values of the parameters describing the external loads and geometries of the contact zones. Rather than to carry out a complete calculation for each set of parameters, we use the capacity of the LATIN method to re-use the solution of a given problem (associated with a set of parameters) to solve others of them. The applications concern 3D structural assemblies with contact and friction connexions.

Mots-clefs :

contact frottant, assemblages, incertitudes

1 Introduction

Dans le contexte de la simulation du comportement mécanique d'assemblages de structures, un réel point noir encore relativement peu étudié, est celui des conditions aux limites, et plus généralement des liaisons entre les pièces et avec l'environnement extérieur. Pourtant, ces liaisons jouent un rôle majeur car elles sont le lieu de phénomènes locaux fortement non linéaires : contact, frottement, plasticité... De plus les grandeurs physiques associés à ces liaisons (coefficients de frottement, efforts extérieurs, jeux entre les pièces) sont entachées d'une grande méconnaissance.

La prise en compte des incertitudes sur le comportement des liaisons dans le calcul par éléments finis s'avère donc le plus souvent nécessaire (Sudret *et al.* (2002)). L'aspect aléatoire peut concerner le modèle (les équations associées) ou les paramètres du modèle. L'incertitude de modèle est la plus délicate à prendre en compte : une approche non paramétrique pour les

systèmes dynamiques est proposée dans Soize (2003). On se placera dans le contexte où l'incertitude porte sur les paramètres du modèle supposé représentatif. La voie alors explorée consiste à obtenir des surfaces de réponse à moindre coût lorsque les paramètres varient dans une plage importante. Dans les travaux présentés ici, nous étendons la stratégie développée dans Boucard *et al.* (2003) à la prise en compte des incertitudes sur les chargements extérieurs et les géométries des zones de contact.

2 La méthode LATIN

Nous présentons ici un rappel des points principaux de la méthode LATIN. Une présentation détaillée de la méthode peut être trouvée dans Ladevèze (1999) et son application au cas particulier des problèmes de contact avec frottement dans Blanzé *et al.* (1995).

2.1 Décomposition d'un assemblage

Un assemblage est composé d'un ensemble de sous-structures qui communiquent au travers d'interfaces (voir figure 1). Chaque interface est une entité mécanique à part entière qui possède ses propres inconnues et relations de comportement. Ici nous ne considérons que des interfaces de contact avec frottement de type Coulomb. Deux sous-structures reliées par une interface $\Gamma^{EE'}$ sont notées Ω_E et $\Omega_{E'}$. Les variables d'interface sont deux champs de forces \mathbf{f}^E et $\mathbf{f}^{E'}$ et deux champs de vitesses duaux $\dot{\mathbf{w}}^E$ et $\dot{\mathbf{w}}^{E'}$ (figure 1).

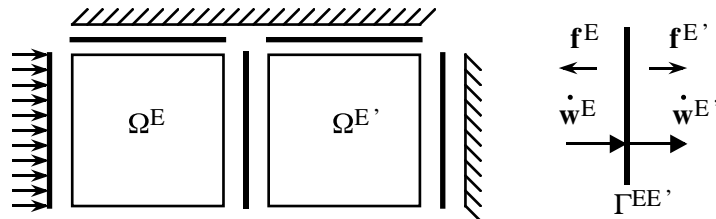


FIG. 1 – Décomposition d'un assemblage et variables d'interface

2.2 Problème pour les sous-structures

Le champ de déplacement en tout point M de Ω_E et à tout instant t de $[0, T]$ est noté $\mathbf{u}^E(M, t)$; l'espace associé est $\mathcal{U}^{[0, T]}$. ϵ est le champ de déformation et l'état de la structure est caractérisé par le champ de contrainte σ^E . Le problème mécanique à résoudre sur chaque sous-structure est :

Trouver les champs de déplacement $\mathbf{u}^E(M, t)$ et de contrainte $\sigma^E(M, t)$ tels que :

- Admissibilité cinématique : $\epsilon = \epsilon(\mathbf{u}^E)$; $\mathbf{u}^E(M, t)|_{\partial\Omega_E} = \mathbf{w}^E(M, t)$; $\mathbf{u}^E \in \mathcal{U}^{[0, T]}$
- Équilibre : $\forall \dot{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{U}_0^{[0, T]}$, $\int_{\Omega_E} \text{Tr}(\sigma^E \epsilon(\dot{\mathbf{u}}^*)) d\Omega_E - \int_{\Omega_E} \mathbf{f}_d \cdot \dot{\mathbf{u}}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega_E} \mathbf{f}^E \cdot \dot{\mathbf{u}}^* dS = 0$
où $\mathcal{U}_0^{[0, T]}$ est un champ de vitesses à énergie finie sur Ω_E qui s'annule sur $\partial\Omega_E$ et $\dot{\mathbf{u}}^*$ un champ de vitesses virtuelles.
- Comportement élastique : $\forall M \in \Omega_E$ et $\forall t \in [0, T]$, $\sigma^E(M, t) = \mathbf{D}\epsilon(\mathbf{u}^E(M, t))$
où \mathbf{D} est l'opérateur de Hooke.

2.3 Problème sur les interfaces

Le problème mécanique à résoudre sur chaque interface est :

- Trouver les forces ($\mathbf{f}^E(M, t)$ et $\mathbf{f}^{E'}(M, t)$) et les vitesses ($\dot{\mathbf{w}}^E(M, t)$ et $\dot{\mathbf{w}}^{E'}(M, t)$)
telles que : $\forall M \in \Gamma^{EE'}$ et $\forall t \in [0, T]$,
- Équilibre : $\mathbf{f}^E(M, t) + \mathbf{f}^{E'}(M, t) = 0$
 - Comportement : $\mathbf{f}^E(M, t) = \mathcal{R}(\dot{\mathbf{w}}^{EE'}(M, \tau), \tau \in [0, t])$

où le comportement est écrit sous la forme d'une loi d'évolution non-linéaire \mathcal{R} entre les forces et le saut de vitesse $\dot{\mathbf{w}}^{EE'} = \dot{\mathbf{w}}^{E'} - \dot{\mathbf{w}}^E$ au travers de l'interface. Par exemple, si l'interface est de type contact parfait entre deux sous-structures, le comportement s'écrira : $\dot{\mathbf{w}}^{EE'}(M, t) = 0$. On ne décrira pas ici dans le détail les différents comportement possibles tels que par exemple le contact avec frottement dont on trouvera une présentation complète dans Boucard *et al.* (2003).

2.4 L'algorithme LATIN

L'approche LATIN est utilisée pour résoudre le problème. La solution s du problème est décrite par un ensemble de champs dépendant du temps sur les sous-structures et les interfaces :

$$s = \sum_E s^E \quad ; \quad s^E = \{\mathbf{u}^E(M, t), \sigma^E(M, t), \dot{\mathbf{w}}^E(M, t), \mathbf{f}^E(M, t)\} \quad t \in [0, T]$$

L'approche LATIN se base sur une séparation des difficultés pour ne pas résoudre simultanément un problème global *et* non-linéaire. Les équations sont donc séparées en deux groupes qui suivent le schéma suivant :

- L'ensemble \mathcal{A}_d des éléments s^E associés aux équations linéaires relatives aux sous-structures
- L'ensemble Γ des éléments s^E associés aux équations locales (éventuellement non-linéaires) relatives aux interfaces

La recherche de la solution (i.e. à l'intersection des deux ensembles \mathcal{A}_d et Γ) se fait itérativement en construisant des approximations successives de la solution s qui vérifient alternativement chacun des deux groupes d'équations. Ainsi chaque itération de la méthode est composée de deux étapes :

Étape locale : connaissant $s_n \in \mathcal{A}_d$, trouver \hat{s} tel que :

$$\hat{s} \in \Gamma \text{ (interfaces)} \quad \text{et} \quad \hat{s} - s_n \in E^+ \text{ (direction de recherche)}$$

Étape globale : connaissant $\hat{s} \in \Gamma$, trouver s_{n+1} tel que :

$$s_{n+1} \in \mathcal{A}_d \text{ (sous-structures)} \quad \text{et} \quad s_{n+1} - \hat{s} \in E^- \text{ (direction de recherche)}$$

Les directions de recherche sont choisies pour que la convergence de l'algorithme soit assurée (Ladevèze (1999)). Les deux directions de recherche sont conjuguées et ne dépendent que d'un paramètre scalaire k_0 :

$$\hat{s} - s_n \in E^+ \quad \equiv \quad (\hat{\mathbf{f}}^E - \mathbf{f}_n^E) = k_0(\hat{\dot{\mathbf{w}}}^E - \dot{\mathbf{w}}_n^E) \quad (1)$$

$$s_{n+1} - \hat{s} \in E^- \quad \equiv \quad (\mathbf{f}_{n+1}^E - \hat{\mathbf{f}}^E) = -k_0(\dot{\mathbf{w}}_{n+1}^E - \hat{\dot{\mathbf{w}}}^E) \quad (2)$$

La solution du problème ne dépend pas de la valeur du paramètre scalaire qui n'affecte que la vitesse de convergence de l'algorithme. Pour les cas quasi-statiques présentés ici, on prend $k_0 = E/(TL_c)$ où E est le module d'Young, $[0, T]$ est l'intervalle d'étude et L_c la plus grande dimension de la structure. La convergence de l'algorithme est contrôlé par un indicateur d'erreur qui est une mesure énergétique de la distance entre deux éléments s_n et \hat{s} .

2.5 Discrétisation

Pour l'implémentation numérique, une discrétisation standard par Éléments Finis est utilisée dans les sous-structures et une discrétisation compatible des champs de vitesse est utilisée sur les interfaces :

$$\mathbf{u} = [N]\{u\}, \epsilon(\mathbf{u}) = [B]\{u\} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{w}}^E = [N]\{\hat{w}^E\}, \dot{\mathbf{w}}_n^E = [N]\{\dot{w}_n^E\} \quad (3)$$

Les directions de recherche conduisent (Eq. 1 et 2) à choisir la même discrétisation pour les forces et les vitesses :

$$\hat{\mathbf{f}}^E = [N]\{\hat{f}^E\} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_n^E = [N]\{f_n^E\} \quad (4)$$

À l'étape locale, les équations de contact et de frottement sont résolues directement en terme de forces nodales et de vitesses. Après discrétisation, l'étape globale conduit à résoudre le problème suivant :

$$k_0 [\mathbf{h}^E] \{\dot{u}(t)\} + [\mathbf{K}^E]\{u(t)\} = [\mathbf{h}^E] \left(\{\{\hat{f}^E\}(t)\} + k_0 \{\hat{w}^E\}(t) \right) \quad (5)$$

où

$$[\mathbf{h}^E] = \int_{\partial\Omega_E} [N]^t [N] ds \quad \text{et} \quad [\mathbf{K}^E] = \int_{\Omega_E} [\mathbf{B}]^t \mathbf{D} [\mathbf{B}] d\Omega$$

$[\mathbf{K}^E]$ est la matrice de rigidité usuelle de la sous-structure Ω_E et $[\mathbf{h}^E]$ représente les termes relatifs aux interfaces. Pour la résolution de cette équation différentielle (Eq. 5), on utilise un schéma d'intégration implicite en temps.

3 Stratégie multirésolution

À chaque itération, la méthode LATIN fournit une approximation de la solution sur toute la structure et sur tout l'intervalle d'étude. Ainsi, l'idée de la stratégie multirésolution est de réutiliser cette approximation pour déterminer la solution d'un problème similaire à celui qui a permis de déterminer cette approximation. On exploite ici le fait que l'algorithme peut être initialisé par une solution quelconque appartenant à l'ensemble \mathcal{A}_d (usuellement une solution élastique). L'idée est donc d'initialiser le processus associé à la structure modifiée (structure associée à un jeu de paramètres) par le résultat du calcul sur la structure dite de "référence" (associé à un jeu initial de paramètres). On dispose ainsi dès la première itération du calcul sur la structure modifiée d'une solution à fort contenu mécanique.

Pour les études paramétriques traitées, nous avons simplement changé les paramètres entre les itérations. Ainsi, le nouveau calcul est initialisé avec la solution du problème précédent. On peut alors résumer l'algorithme par le tableau 1. Peu d'itérations sont nécessaires pour obtenir la solution de chaque problème modifié.

4 Exemple

L'exemple présenté est celui d'une frette qui sert à accoupler (de manière démontable) une roue sur un arbre. Le principe de la frette est de venir serrer la roue sur l'arbre par l'intermédiaire d'un bi-cône écrasé entre deux plateaux par un ensemble de 10 vis (fig. 2-gauche). La figure 2-centre présente le maillage et la décomposition de la structure utilisés. Pour les deux exemples présentés ici, le serrage des 10 vis est le même. On ne s'intéresse donc qu'à la portion de la structure située autour d'une vis. La figure 2-droite présente les interfaces sur cette

Définition des bornes de variation des paramètres, initialisation
Boucle sur les sous-structures (E) Calcul et factorisation de $[K^E]$ et $[h^E]$
Boucle sur les interfaces $\{\dot{w}_0^E\} = \{\dot{w}_0^{E'}\} = \{\hat{w}^E\} = \{\hat{w}^{E'}\} = \{0\}$ $\{f_0^E\} = \{f_0^{E'}\} = \{\hat{f}^E\} = \{\hat{f}^{E'}\} = \{0\}$
Boucler $k = 1, 2, \dots$ sur le nombre de jeux de paramètres
Récupérer les quantités sur les interfaces et itérer
Étape globale \rightarrow Étape locale \rightarrow Test de convergence
Sauvegarde de la solution associée au k^{eme} jeu de paramètres

TAB. 1 – Algorithme d'études paramétriques avec la méthode LATIN

portion : la roue est bloquée à l'une de ses extrémités et on applique des efforts sur l'arbre jusqu'à obtenir un glissement global de manière à mesurer l'effort axial et le couple transmissibles simultanément. Le maillage utilisé comporte 65 682 éléments volumiques quadratiques et 313 344 degrés de liberté. Le calcul est découpé en deux phases : pré-charge de la vis (1 pas de temps) et application du chargement sur l'arbre (20 pas de temps).

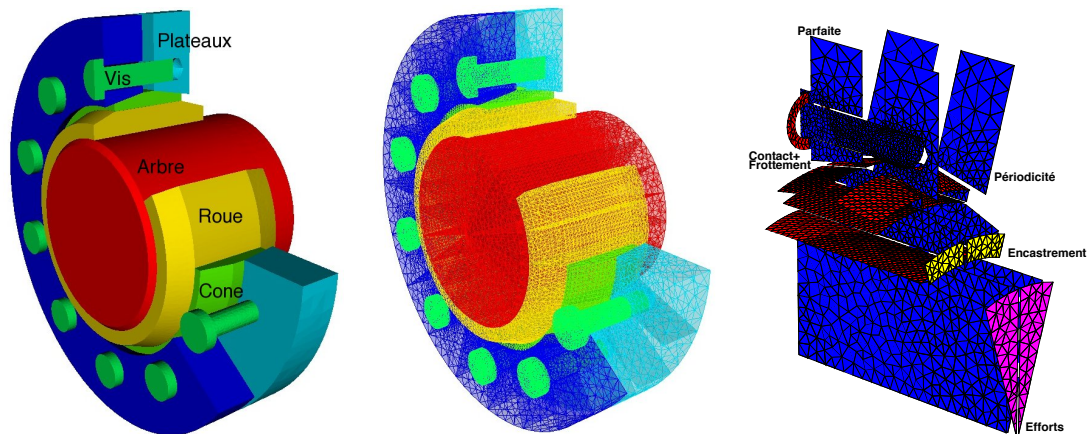


FIG. 2 – Frette étudiée. Décomposition en sous-structures et interfaces.

On s'intéresse ici à deux études paramétriques différentes. La première consiste à prendre en compte des variations de conditions aux limites. On étudie la réponse de l'assemblage pour un certain nombre de chargements combinés allant de l'effort axial pur au couple pur. On cherche à calculer sept cas de chargement. La figure 3-gauche présente l'évolution de l'indicateur d'erreur pour les sept calculs enchaînés. On remarque qu'à chaque nouvelle modification du chargement, le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence est beaucoup plus faible que celui obtenu pour le premier calcul.

La seconde étude concerne les modifications de géométrie. La figure 3-centre présente la réponse (charge-déplacement) de l'assemblage pour un chargement axial et pour différentes valeurs du jeu j entre le rayon de l'arbre et celui de la roue (10 valeurs de j entre 0 et 0.025mm). Dans cette étude, la géométrie réelle des pièces n'est pas modifiée, seule la valeur du jeu est mise à jour dans les conditions de contact sur les interfaces. La figure 3-droite présente l'évolution de l'effort axial maximal transmissible en fonction du jeu.

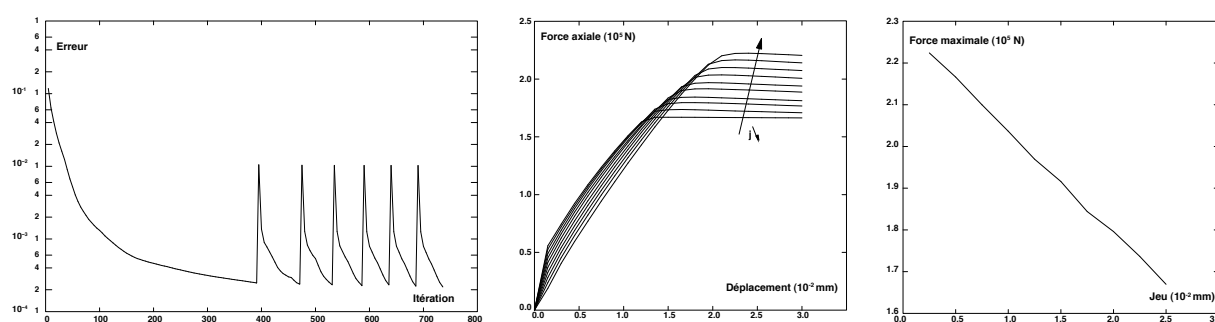


FIG. 3 – Indicateur d'erreur dans le cas de la variation de chargement. Réponse de la structure à un chargement axial lorsque le jeu roue/arbre varie. Effort maximal transmissible en fonction du jeu

Le tableau 2 indique les coûts de calculs respectifs des différentes études paramétriques lorsqu'elles sont directes ou menées avec la stratégie multirésolution présentée dans ce papier. On visualise ici le gain important en terme de coût de calcul de l'approche proposée.

Etude	Calcul direct	Multi-résolution
Variation chargement (7 calculs)	49h	12h
Variation géométrie (10 calculs)	73h	13,25h

TAB. 2 – Comparaison des coûts de calcul pour les deux études

5 Conclusions

Nous avons présenté une méthode spécialisée pour l'étude paramétrique d'assemblages incluant de multiples zones de contact frottant. Cette méthode tire parti du fait que les non-linéarités et/ou les incertitudes sont localisées dans les liaisons. Plutôt que de réaliser un calcul complet pour chaque jeu de paramètres, nous utilisons la capacité de l'algorithme de résolution à réutiliser simplement la solution d'un problème donné (associé à un jeu de paramètres) pour en résoudre d'autres. Les exemples proposés concernent une situation 3D industrielle de frette pour laquelle on veut prendre en compte des variations de chargement (transmission d'efforts axiaux et de couples) et des incertitudes sur la géométrie (jeu entre les pièces). La comparaison entre une approche de simulation directe et l'approche multirésolution proposée montre l'intérêt de cette stratégie en terme de réduction des coûts de calcul.

Références

- Sudret, B. and Der Kiureghian, A. 2002 Comparaison of finite element reliability methods. *Probabilistic Engineering Mechanics* 17, 337–348
- Soize, C. 2003 Random matrix theory and non parametric model of random uncertainties in vibration analysis *Journal of Sound and Vibration* **263**(4) 893–916
- Ladevèze, P. 1999 Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation. Ed. Springer-Verlag New York
- Boucard, P.A., Champaney, L. 2003 A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **57** 1259–1281
- Blanzé, C., Champaney, L., Cognard, J.Y., Ladevèze, P. 1995 A modular approach to structure assembly computations, *Engineering Computations* **13**(1), 15–32